1

বিজ্ঞান-ভারতী পত্রিকা
কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়
২য় সংখ্যা, July 1959

গণিত ॥

আইনষ্টাইনের মহাকর্ষ তত্ত্ব

॥ রতনলাল ব্রহ্মচারী ॥

ভারতীয় পরিসংখ্যান সংস্থা

(Indian Statistical Institute)

নিউটন এবং আইনষ্টাইনের দৃষ্টি ভংগীর মূল পার্থক্য দেশ-কালের জ্যামিতিক রূপে। নিউটনের মতে দেশ-কালের জ্যামিতিক রূপ পদার্থ-নিরপেক্ষ, কিন্তু আইনষ্টাইনের মতে ইহা পদার্থ-সাপেক্ষ। * পদার্থের প্রভাবে (বা শক্তির প্রভাবে, কারণ পদার্থ = শক্তি) দেশ-কালের পরিবর্ত্তন সংঘটিত হয়।

১। দেশ-কালের গানিতিক রূপ।

সকলেই জানেন, ত্রিমাত্রিক ইউক্লীডীয় দেশের জ্যামিতি নিম্নলিখিত সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

(১) $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

(কোর্টেজীয় কো-অর্ডিনেটের সাহায্যে)

আবার, আমরা "পোলার" কো-অর্ডিনেটের সাহায্যে লিখিতে পারি।

(২) $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$

বক্র-পৃষ্ঠের উপর আমরা পাই

(৩) $ds^2 = d\beta^2 + \cos^2\beta d\lambda^2$

(এখানে β, λ যথাক্রমে ল্যাটিটিউড এবং লংগীটিউড।

রীমান্ (Riemann) এর সাধারণ সমীকরণ।

(৪) $ds^2 = \Sigma_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = g_{11} (dx_1)^2 + g_{12} dx_1 dx_2 + \cdots$ ···ইত্যাদি

যদি $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ এবং g_{12}, g_{23}······ইত্যাদি $= 0$

(অর্থাৎ, $g_{\mu\nu} = 1 \; ; \mu = \nu$

$g_{\mu\nu} = 0 \; ; \mu \neq 0$)

তবে $ds^2 = g_{11}(dx_1)^2 + g_{22}(dx_2)^2 + g_{33}(dx_3)^2$

$= dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

অতএব আমরা বলিতে পারি, ইউক্লীডীয় বিশ্বে এবং কার্টেজীয় কো-অর্ডিনেটে $g_{\mu\nu} = 1 \; ; \mu = \nu$

$g_{\mu\nu} = 0 \; ; \mu \neq \nu$

এইরূপে পোলার কো-অর্ডিনেটে, $g_{11} = r^2$, $g_{12} = 0$ ইত্যাদি। ইউক্লীডীয় জ্যামিতিতে যে কোন কো-অর্ডিনেট হইতে আমরা কার্টেজীয় কো-অর্ডিনেটে চলিয়া আসিতে পারি, অর্থাৎ ইউক্লীডীয় দেশে $g_{\mu\nu}$ গুলির মান Constant হইতে পারে। কিন্তু বক্র পৃষ্ঠে ইহা সম্ভব নহে।

২। আইনষ্টাইনীয় দেশ-কালের গাণিতিক রূপ

আইন্ষ্টাইনের চতুর্মাত্রিক দেশ-কালের রীমানীয় রূপ।

(৫) $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$ [μ, ν = ১, ২, ৩, ৪]

পদার্থহীন, শূন্য দেশ-কালের রূপ :

(৬) $ds^2 = -(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2) + dx_4{}^2$

$= -(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) + dt^2$

এখন দেখা যাক, একটি পদার্থ-গোলক এই স্থানে আনয়ন করিলে, দেশ-কালের কি পরিবর্ত্তন ঘটে। এই পরিবর্ত্তনের প্রকৃতি হইবে "গোলক-সমতাযুক্ত" (Spherically Symmetric), অর্থাৎ সহজ কথায়, গোলকের চতুর্দিকে সমতা রক্ষা করিয়া এক "দেশ-কালের বক্র-রূপ" দেখা দিবে।

অতএব আমরা লিখিতে পারি

(৭) $ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 \cdots\cdots + e^\nu dt^2$

* আইনষ্টাইনের প্রায় এক শতাব্দী পূর্বে রীমান (Riemann) এইরূপ ধারণা করিয়াছিলেন। একমাত্র ক্লীফর্ড (Clifford) ব্যতীত আর কেহই রীমানের এই বিস্ময়কর চিন্তাধারার কোনও পর্যালোচনা করেন নাই। ক্লীফর্ডের রচনা পাঠ করিয়া এদেশে রামেন্দ্রসুন্দর ত্রিবেদী এই বিষয়ে একটু চিন্তা করিয়াছিলেন।

এখানে $\lambda = f_1(r)$ এবং $\nu = f_2(r)$

$g_{11} = e^{\lambda}$, $g_{22} = r^2 \cdots\cdots g_{44} = e^{\nu}$

যদি $g_{11} = e^{\lambda} = g_{44} = 1$, তবে (১)→(৬)

৩। আইনষ্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণ।

চতুর্মাত্রিক দেশের বক্রতা $R^{\rho}{}_{\mu\nu\delta}$ এই টেনশরের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এই টেনশর শুধু $g_{\mu\nu}$ এবং তাহাদের ডেরিভেটিভ (Derivative) সমূহের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

যদি আমরা শূন্য দেশ-কালে, অর্থাৎ, পৃথিবীর বাহিরে সৌর দেশ-কালে,

$$R^{\rho}{}_{\mu\nu\delta} = 0$$

এই সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করি, তবে তার অর্থ হয় যে সৌর দেশের জ্যামিতি সর্বত্র ইউক্লীডীয় অর্থাৎ $g_{\mu\nu} = 1$, $\mu = \nu$ কিন্তু তাহলে এই দেশে একটি ক্ষুদ্র-পদার্থ-গোলক একটি সরল রেখায় চলিতে বাধ্য। (কারণ নিউটনের মতে বলক্ষেত্র নামক একটি অজ্ঞাত, রহস্যময় সত্ত্বা, একটি ক্ষুদ্র পদার্থ-গোলককে তাহার সরলরৈখিক গতি হইতে বিচ্যুত করে। কিন্তু আইনষ্টাইনের ভূয়োদর্শনে বলক্ষেত্র নামক কোন রহস্যময় সংজ্ঞা নাই। তাঁহার মতে নিউটনীয় বলক্ষেত্রের অর্থ হইতেছে এই যে, দেশ-কালের জ্যামিতিক রূপ পদার্থের প্রভাবে বক্র হইয়া যায়। এই বক্র ক্ষেত্রে, একটি পদার্থ-বিন্দুর গতি বক্ররৈখিক।) কিন্তু গ্রহগুলির গতি বক্ররৈখিক; কাজেই সৌর দেশ-কালে $R^{\rho}\mu\nu\delta = 0$ এই সমীকরণ অসিদ্ধ। অতএব আমরা এক সূত্র বা সর্তের সন্ধানকরিব—যাহা অতটা নিখুঁত ও যথাযথ নয়। টেন্সর্-সংকুচন নামক প্রক্রিয়ায় আমরা $R^{\rho}_{\mu\nu\delta}$ হইতে $\underset{\delta}{\Sigma} R_{\mu\nu\delta}\ (\rho = \delta)$ বা $R_{\mu\nu}$ নামক ক্ষুদ্র-টেনশর পাইতে পারি। এখন, পদার্থ-শক্তি, দেশ কালের বক্রতা এবং নিউটনীয় মহাকর্ষের সমীকরণ

$\triangle\ \phi = K_1\rho$ (ρ = পদার্থের ঘনত্ব বা ঘনাঙ্ক)

অতএব আইনষ্টাইনের নূতন সমীকরণে, বাম দিকে, বলক্ষেত্রের পরিবর্তে থাকিবে দেশ-কালের বক্রতা এবং ডান দিকে থাকিবে পদার্থ বা শক্তির টেনশর। এইরূপে আইনষ্টাইন্ প্রথমে লিখিলেন

$$R\mu\nu = K_2\ T\mu\nu \cdots\cdots (৮)$$

বক্রতার টেনশর = শক্তির টেনশর

(স্থির, গতিহীন পদার্থের বেলায় $T\mu\nu = T_{44} = \rho$)

কিন্তু ইহা ভুল। শক্তির বিনাশ নাই, অর্থাৎ গণিতের ভাষায় $T\mu\nu$ এর ডাইভার্জেন্স্ = শূন্য। অতএব ৮নং সমীকরণের বাম দিকে এমন কিছু থাকা দরকার যাহার ডাইভারজেন্স্ = শূন্য। অর্থাৎ $R\mu\nu - {}^1\!/_2 g\mu\nu R$ এইরূপ একটি জিনিষ।

অতএব আইনষ্টাইন লিখিলেন

$$R\mu\nu - {}^1\!/_2 g\mu\nu R = KT\mu\nu \cdots\cdots (৯)$$

ইহাই আইনষ্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণ।

৪। শোয়াজ্‌শিল্‌ড্‌ এর সমাধান (Schwarzchild)

এইবার (৭) নং সমীকরণে ফিরিয়া আসা যাক।

পদার্থ-গোলকের বাহিরে $R\mu\nu = O$। $R\mu\nu$ গুলিকেও $g\mu\nu$র সাহায্যে, অর্থাৎ, e^{λ}, e^{ν}, r, $\sin^2\theta$, ইত্যাদির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এইরূপে, অনেক হিসাব করিয়া দেখা যায়—

(১০)

(ক) $R_{11} = \nu^{11}/_2 - {}^1\!/_4\lambda^1\nu^1 + {}^1\!/_4(\nu^1)^2 - \lambda^1/r = 0$

(খ) $R_{22} = e - \lambda\ \{1 + {}^1\!/_2 r\,(\nu^1 - \lambda^1)\} - 1 = 0$

(গ) $R_{33} = \sin^2\theta\ (R_{22})$

(ঘ) $R_{44} = e^{\nu - \lambda}(-\nu^{11}/_2 + \lambda^1\nu^1/_4 - (\nu^1)^2/_4 - \nu^1/r = 0$

$(\lambda^1 = d\lambda/dr,\ \nu^1 = d\nu/dr)$

ধরা যাক্ $\lambda^1 = -\nu^1$. তবে ১০ ঘ $= R_{44}\, e^{\nu - \lambda}$ $(-R_{11}) = 0$

আবার, $\lambda = -\nu + a$

যখন, $r \to \infty$, $e^{\lambda} = e^{-\nu} = 1$ বা $\lambda = -\nu$ অতএব $a = 0$ বা $\lambda = -\nu$.

অতএব ১০ (খ) হইতে পাওয়া যায়,

$$e^{\nu}\{1 + r(\nu)'\} = 1 \quad \text{বা} \quad e^{\nu} = 1 - c/r = e^{-\lambda}$$

$$(১১) \quad ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - c/r} \cdots\cdots (1 - c/r)\, dt^2$$

আইনষ্টাইনের সমীকরণ বাহ্যতঃ নিউটনের সমীকরণ প্রায় সমতুল্য হইতে বাধ্য। এই চিন্তাধারার সাহায্যে দেখানো যায়, $c = 2m$ (m = পদার্থের ভর) যদি পদার্থ-গোলকটিকে সূর্য ধরা যায়, তবে ১০ এবং ১১ সমীকরণ বিপুল সৌর দেশে পৃথিবী ও তাহার গ্রহমালার গতিবিধি নির্ণয় করিবে। এইরূপে বুধগ্রহের একটি বিখ্যাত রহস্যময় গতি ভঙ্গীর কারণ নির্ণয় করা গিয়াছে। আবার, দেখা যাইতেছে, "প্রকৃত সময়" $= ds = (1 - \frac{2m}{r})\, dt$.

অতএব সূর্য ও ধরণীর বুকে দুইটি অক্সিজেন-পরমানুর কম্পন λ-ছন্দ ভিন্ন রকমের, কারণ,

$$ds = (g_{44})^{1/2}\, dt = (1 - \frac{2m}{r})^{1/2} dt.$$

এখন, চতুষ্পাদদেশে ds একটি ইন্‌ভ্যারিয়ান্ট্ (invariant), অর্থাৎ $ds_1 = ds_2$

অতএব, $(g_{44})^{1/2}_{\text{পৃথিবী}}\, dt_1 = (g_{44})^{1/2}_{\text{সূর্য}}\, dt_2$.

$$\text{অতএব } dt_1/dt_2 = \frac{(g_{44})^{1/2}_{\text{সূর্য}}}{(g_{44})^{1/2}_{\text{পৃথিবী}}} \neq 1.$$

এই পার্থক্য এখনও পরীক্ষাগারে ধরা যায় নি।